න්‍යාස (Matrices)

* අවයව සමූහයක් සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආකාරයට සකස් කිරීමෙන්, න්‍යාසයක් සාදයි

$$A = \begin{array}{cccc} C1 & C2 & C3 & \\ \left[\begin{matrix} a \\ d \end{matrix}\right. & \begin{matrix} b \\ e \end{matrix} & \left.\begin{matrix} c \\ f \end{matrix}\right] & \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \end{array}$$

2×3

පේළි (r) තීර (c)

තරම = 2×3 ⇒ පේළි = 2
(ගණය) තීර = 3

සටහන 1 – න්‍යාසයක ගණය කීමට
මුලින් පේළි ගණනත්
~~ගණය කීමට~~
පසුව තීර ගණනත් කියයි.

න්‍යාස වර්ග

① පේළි න්‍යාස

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

එක් පේළියකින් පමණක්

② තීර න්‍යාස

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

එක් තීරයකින් පමණක්

③ ශූන්‍ය න්‍යාසය [0]

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

සියලුම අවයව ශූන්‍ය න්‍යාසයකි

④ පෙරළුම් න්‍යාසය (A^T, B^T)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \\ d & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

එකිනෙකට මාරු කරනා පේළි → තීර
තීර → පේළි මාරු කර
න්‍යාසයක් එම න්‍යාසයේ පෙරළුම් න්‍යාසයයි

⑤ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & x & y \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

පේළි ගණන (r) = තීර ගණන (c)

Note:-

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}$$

ද්විතීක විකර්ණය ප්‍රධාන විකර්ණය

⑥ විකර්ණ න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

විශේෂ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි

ප්‍රධාන විකර්ණය දෙපස අවයව සියල්ලම ශූන්‍ය වේ.

⑦ අදිශ න්‍යාස

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

විශේෂ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි

ප්‍රධාන විකර්ණයේ අවයව සමාන වේ
ප්‍රධාන විකර්ණය දෙපස අවයව සියල්ලම ශූන්‍ය වේ

⑧ ඒකක න්‍යාසය [I]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

විශේෂ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි

ප්‍රධාන විකර්ණයේ අවයව සියල්ලම 1 යි
ප්‍රධාන විකර්ණය දෙපස අවයව සියල්ල ශූන්‍ය වේ

⑨ සමමිතික න්‍යාස

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

විශේෂ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි

ප්‍රධාන විකර්ණයෙන් දෙපස අවයව සියල්ලම සමාන වේ

* A, සමමිතික න්‍යාසයක් නම්,

$$A = A^T \text{ වේ}$$

ඔප්පු කිරීම

$$A = \begin{bmatrix} a & x \\ x & b \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & x \\ x & b \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A = A^T \text{ වේ.}$$

⑩ කුටිල සමමිතික න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -10 \\ -7 & 0 & -8 \\ 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

විෂම සමමිතික න්‍යාසයකි

ප්‍රධාන විකර්ණයේ අවයව සියල්ලම ශුන්‍ය වී ප්‍රධාන විකර්ණය දෙපස අවයව සැලකූ විට, එක් පසෙක අවයවවල (-) අගය අනෙක් පස වේ.

* A, කුටිල සමමිතික න්‍යාසයක්නම්,

$$A^T = -A \text{ වේ}$$

ඔප්පු කිරීම

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ නම්}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -A$$

⑪ ත්‍රිකෝණමිතික න්‍යාසය.

විශේෂ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් වේ

① උඩත් Δමිතික න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

(උඩ අවයවයන්ගෙන් පමණක් ප්‍රධාන විකර්ණයෙන් පහළ අවයව සියල්ල 0 ක් වන න්‍යාසයක්

② යටත් Δමිතික න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

(යට අවයවයන්ගෙන් පමණක් ප්‍රධාන විකර්ණයෙන් ඉහළ අවයව සියල්ල 0 ක් වන න්‍යාසයක්

Note:

තදින්ම උඩත් Δමිතික න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

තදින්ම යටත් Δමිතික න්‍යාසය

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

න්‍යාස ආශ්‍රිත ගණ කිරීම්

න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම.

- න්‍යාස දෙකක් එකතු කිරීම / අඩු කිරීමට ගණය සමාන විය යුතුය.
- අනුරූප අවයව එකතු කිරීම / අඩු කිරීම කරයි.

$$\text{උදා: } A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+8 \\ -3+10 & 4+15 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-8 \\ -3-10 & 4-15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -13 & -11 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0-7 & 8-5 \\ 10+3 & 15-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

- න්‍යාසයක් අදිශයකින් ගුණ කිරීමේදී සෑම අවයවයක්ම අදිශයෙන් ගුණවෙයි
- සෑම අවයවයකටම පොදු සාධකයක් පවතීනම් එය න්‍යාසයෙන් පිටතට ගත හැක.

2.1 :- λ අදිශයකි, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ නම්

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2. උදා :- $A = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 300 & 400 \end{bmatrix}$

$$A = 100 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

- න්‍යාස එකතු කිරීමේදී න්‍යාදේශනීයතාව පෙන්විය හැක.

$$\boxed{A + B = B + A}$$

- න්‍යාස එකතු කිරීමේදී සංඝටනතාවය පෙන්විය හැක.

$$\boxed{(A + B) + C = A + (B + C)}$$

- න්‍යාස එකතු කිරීමේදී විඝටනතාවය පෙන්විය හැක.

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	
$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$	

$$\boxed{\lambda(A - B) = \lambda A - \lambda B}$$

න්‍යාස දෙකක සමානතාවය.

ගණය සමාන න්‍යාස දෙකෙහි අනුරූප අවයව සමාන නම්, එම න්‍යාස දෙක සමාන වේ.

* එනම්, න්‍යාස දෙකක් සමානනම්, අනුරූප අවයව සමානවේ.

මිශ්‍ර අභ්‍යාස

① $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසයනම්,

i) $5B - 2A - 3I$

$5B - 2A - 3I$

$$= 5\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & -20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & -30 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -35 & -50 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -50 \\ -4 & -19 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

② $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & -10 & -12 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 20 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ $A + B = C^T$ නම්;

x, y, a, b, c, d සොයන්න

$$A + B = C^T$$

$$\begin{bmatrix} 7 + a & -3 + b & 4 + c \\ 0 + d & x - 10 & y - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 7 & 20 & -4 \end{bmatrix}$$

$7 + a = 3$
$a = -4$ //

$-3 + b = 5$
$b = 8$ //

$4 + c = -2$
$c = -6$ //

$d = 7$ //

$x - 10 = 20$
$x = 30$ //

$y - 12 = -4$
$y = 8$ //

න්‍යාස ගුණ කිරීම

③ $A = \begin{bmatrix} x & 7 & 9 \\ y & 0 & 6 \\ z & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -9 & -4 \end{bmatrix}$

$A + B = C$ වේ C විෂම සමමිතික න්‍යාසයක් නම්, x, y, z සොයන්න.

$C = A + B$

$C = \begin{bmatrix} x+6 & 10 & 11 \\ y+1 & 0 & 4 \\ z+3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

C විෂම සමමිතික න්‍යාසයක් බැවින්,

$x = -6$ $y + 1 = -10$
$y = -11$

$z + 3 = -11$
$z = -14$

න්‍යාස ගුණ කිරීම.

- පළමු න්‍යාසයේ තීරු ගණන = දෙවන න්‍යාසයේ පේළි ගණන විය යුතුයි.

- තවද සමාන වීම අවශ්‍යමයි.

$[A]_{m \times n} \times [B]_{n \times t}$

$= [AB]_{m \times t}$

- එහි ගුණිතයේ ස්වරූපය,
  පළමු න්‍යාසයේ පේළියේ x දෙවන න්‍යාසයේ තීරුවේ අවයව පිළිවෙළින් ගුණ කිරීමෙනි

උදා: ① $\begin{bmatrix} a & b & c \\ P & Q & R \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

$\begin{bmatrix} 2a + 4b + 6c & 3a + 5b + 7c \\ 2p + 4q + 6R & 3p + 5q + 7R \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

- න්‍යාස ගුණිතය සඳහා ක්‍රම විනිමය ගුණය සත්‍ය නොවේ.

$\boxed{AB \neq BA}$

- න්‍යාස ගුණිතය සඳහා විභේදන ගුණය වලංගු වේ (ආකලනය, පූර්ව ගුණිතය, පශ්චාත් ගුණිතය, ව්‍යවකලනය)

$$\boxed{\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (B+C)A &= BA + CA \end{aligned}}$$

- න්‍යාස ගුණිතය සඳහා සාහචර්ය ගුණය වලංගු වේ.

$(AB)C = A(BC)$

- ඕනෑම න්‍යාසයක් ඒකක න්‍යාසයෙන් (I) ගුණ කලත් එම න්‍යාසයමයි.

උදා: ① $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ නම්,

I) A^2 II) A^3 සොයන්න

I) $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+0 & 0+0 \\ 3+5 & 0+25 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 25 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

II) $A^3 = A \cdot A^2$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 25 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 27+0 & 0+0 \\ 9+40 & 0+125 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 49 & 125 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

② $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$

I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසයකි.

O යනු 2×2 ශූන්‍ය න්‍යාසයකි.

$A^2 + 4B + C + 7I = O$ නම්,

a, b, c, d සොයන්න

පළමුව A^2 සොයමු

$$A^2 = \begin{bmatrix} \boxed{4\ 7} \\ 1\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+7 & 28+0 \\ 4+0 & 7+0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 23 & 28 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= A^2 + 4B + C + 7I = O$$

$$\begin{bmatrix} 23 & 28 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 23 & 28 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C + \begin{bmatrix} 22 & 40 \\ 4 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 22+a & 40+b \\ 4+c & 38+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = -22$ // $b = -40$ //

$c = -4$ // $d = -38$ //

න්‍යාසවල සංකේතාත්මක නිරූපණය

① සෘජුකෝණාස්‍ර න්‍යාසයක් නිරූපණය

1 ක්‍රමය

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

a i වන පේළිය

a j වන තීරුව

ඉහත A න්‍යාසය [illegible]

නිරූපණය වේ

2 ක්‍රමය

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$

මෙහි; $i = 1, 2, \ldots m$ (පේළි)

$j = 1, 2, \ldots n$ (තීරු)

② ඒකක න්‍යාසය

1 ක්‍රමය

I යනු ඒකක න්‍යාසයකි

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2 ක්‍රමය

$I = [a_{ij}]$

$i = j$ වන විට, $a_{ij} = 1$

$i \neq j$ වන විට, $a_{ij} = 0$

③ සමමිතික න්‍යාසය

1 ක්‍රමය

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2 ක්‍රමය

A සමමිතික න්‍යාසයක් නම්,

$A = [a_{ij}]$

$a_{ij} = a_{ji}$

④ ශූන්‍ය න්‍යාසය

3 ආකාරය

$A = [a_{ij}]$

සෑම i, j සඳහා

$a_{ij} = 0$ වේ

Note:-

① නිර්ණායක (determinent)

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක අගයට අනුරූප සංඛ්‍යාව එහි නිර්ණායකයෙන් ලැබෙනු ඇත.

① 2×2 නිර්ණායක.

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}_{2\times2}$$

② 3×3 නිර්ණායක

$$B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}_{3\times3}$$

2×2 නිර්ණායක සොයාගන්නා ආකාරය

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ද්විතීක විකර්ණය

ප්‍රධාන විකර්ණය

නිර්ණායක $A = \det|A| = |A| = \det A$

$$\det|A| = [ad - bc]$$

උදා: ① $P = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}_{2\times2}$

$$\det|P| = [-7.4 - 0.8]$$

$$= [-28 - 0]$$

$$= [-28]$$

~~ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය~~

Note:

② සහබද්ධ න්‍යාසය

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ නම්,

A වල සහබද්ධ න්‍යාසය $= \operatorname{adj} A$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- ප්‍රධාන විකර්ණයේ අගයන් මාරුකර ද්විතීක විකර්ණයේ අගයන් වල (-1)X ගුණය ගනී.

ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය.

සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි.

පූර්ව දැනුම,

$AB = BA = I$ නම්,

$A^{-1} = B$ වේ

$B^{-1} = A$ වේ

ප්‍රතිලෝම න්‍යාස සෙවීමේ ක්‍රම

Ⅰ සහබද්ධ න්‍යාසය මගින්

Ⅱ ආවර්තනය කිරීම මගින්

Ⅲ සාමාන්‍ය ක්‍රමය මගින්.

Ⅰ සහබද්ධ න්‍යාසය මගින් ප්‍රතිලෝම න්‍යාස සෙවීම

2×2 න්‍යාස සඳහා පමණක් භාවිතා වේ.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det|A|}}$$

උදා: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ නම්

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{(ad - bc)}$$

2.19 $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ නම්

B^{-1} සොයන්න

$$B^{-1} = \frac{adj\, A}{\det |A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}}{(8 - 15)}$$

$$= -\frac{1}{7} \times \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 5/7 & -8/7 \end{bmatrix} //$$

ප්‍රතිලෝම න්‍යාස ආශ්‍රිත සමහර වැදගත් ප්‍රතිඵල

① යම් න්‍යාසයකට ප්‍රතිලෝම න්‍යාසයක් පවතින්නේ එම න්‍යාසයේ නිර්ණායකය ≠0 විය යුතුය.

* A^{-1} පැවතීමට $\det |A| \neq 0$ විය යුතුය.

2.20 $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ නම්

A^{-1} පවතී ද?

$\det |A| = [24 - 24]$

$= 0$

$\therefore A^{-1}$ නොපවතී.

② $A \cdot A^{-1} = I$

$A^{-1} \cdot A = I$

$A^{-1} \cdot I = A^{-1}$

$A \cdot I = A$

$A^{-1} \cdot 0 = 0$

$A \cdot 0 = 0.$

③ අපූර්ව න්‍යාසය,

A න්‍යාසයක් නම්,

$\det |A| = 0$ නම්,

A අපූර්ව න්‍යාසයකි.

④ අනපූර්ව න්‍යාසය,

A න්‍යාසයක්
$\det |A| \neq 0$ නම්,

A අනපූර්ව න්‍යාසයකි

III ආදේශනය කිරීම මගින් ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය සෙවීම.

සමීකරණය $\times A^{-1}$ කර විසඳීම ②

2.21 ① $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ නම්. පහත ප්‍රශ්න විසඳන්න.

I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසයයි

O යනු 2×2 ශූන්‍ය න්‍යාසයයි

I) $A^2 - 3A + I = 0$ බව පෙන්වන්න

II) එනයින් A^{-1} සොයන්න

I) A^2 සෙවීම

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1 & 2+1 \\ 2+1 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

L.H.S

$A^2 - 3A + I$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0$

$A^2 - 3A + I = 0$ —①

II) ① × A^{-1}

~~$A.AI - 3A.I + I.I = 0.I$~~

~~$A\,A$~~

$$A^{-1}.A^2 - 3\underbrace{A^{-1}A}_{=I} + \underbrace{A^{-1}I}_{=A^{-1}} = \underbrace{A^{-1}.0}_{=0}$$

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{=I}.A - 3I + A^{-1} = 0$$

$$AI - 3I + A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = 3I - AI$$

$$A^{-1} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} //$$

(II) ගුණිත ය ක්‍රමය මගින් ප්‍රතිලෝමය සෙවීම.

පියවර ; ප්‍රතිලෝම න්‍යාස සංකේතය
අඥාතයන්ගෙන් ලියන්න
පසුව

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ ට}$$

ආදේශ කර
සංගුණක සමානකරණයෙන්
A^{-1} ලැබේ.

උදා: ① $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ හි A^{-1} සොයන්න.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ලෙස ගනිමු.

$$A . A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \times a + 2 . c & 5b + 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c = 0 \quad , \quad d = 1$

$a = 1/5 \quad , \quad b = -2/5$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

අභ්‍යාස

① $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in IR$ යැයි ගනිමු,
$A\ (\lambda A + \mu I) = I$ වන පරිදි λ හා μ අගයන් සොයන්න.
I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ. එනයින් A^{-1} සොයන්න.

$$A\left[\lambda A + \mu I\right] = I$$

$$\lambda A^2 + \mu \underbrace{AI}_{= A} = I$$

A^2 සොයමු

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 3 + \mu 2 & \lambda 5 + \mu \\ -\lambda 5 - \mu & \lambda 8 + 3\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3\lambda + 2\mu = 1$

$5\lambda + \mu = 0$

$\mu = -5\lambda$

$\mu = 5/7 \ //$

$3\lambda - 10\lambda = 1$

$-7\lambda = 1$

$\lambda = -1/7 \ //$

$$-\frac{1}{7} A^2 + \frac{5}{7} A = I \ —①$$

$① \times A^{-1}$

$$-\frac{1}{7} A \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} + \frac{5}{7} \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \underbrace{I \cdot A^{-1}}_{A^{-1}}$$

$$-\frac{1}{7} \underbrace{AI}_{= A} + \frac{5}{7} I = A^{-1}$$

$$-\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{5}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/7 + 5/7 & -1/7 + 0 \\ 1/7 + 0 & -3/7 + 5/7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1/7 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} //$$

② $A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ k & k+4 \end{bmatrix}$ නම්

A^{-1} නොපවතින්නේනම්

det|A| = 0 විය යුතුය

$\det|A| = \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & k+4 \end{vmatrix}$

$\det|A| = (2k + 8 - k^2) = 0$

$-k^2 + 2k + 8 = 0$

$(k - 4)(k + 2) = 0$

$k = +4$ හෝ $k = -2$ විය යුතුය //

③ $P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ නම්

P^{-1} සොයන්න, එමගින්

$PP^{-1} = I$ බව සත්‍යාපනය කරන්න

$$P^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}{(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1})}$$

$$= \frac{1}{1\ \cancel{\cos\alpha}} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

LHS

$P.P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= I$ //

④ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ නම්

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj } AB}{\det|AB|}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 14 & -8 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}}{[98 - 120]}$$

$14 \times 7 = 98$

$15 \times 8 = 120$

$$= \frac{-1}{22} \times \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{11} & +\frac{4}{11} \\ +\frac{15}{22} & -\frac{7}{22} \end{bmatrix} \text{ — ①}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{\text{adj } B}{\det|B|} \cdot \frac{\text{adj } A}{\det|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}{[8 + 3]} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{[2 - 4]}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ +2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} + \frac{6}{11} & \frac{1}{11} + \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{22} + \frac{16}{22} & \frac{1}{22} - \frac{8}{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{15}{22} & -\frac{7}{11} \end{bmatrix} \text{ — ②}$$

① = ②

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⑤ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ නම්

$(A+B)^T = A^T + B^T$ බව පෙන්වන්න

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ — ①}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ — ②}$$

① = ②

$(A+B)^T = A^T + B^T$

සමගාමී සමීකරණ විසඳීමට න්‍යාස භාවිතය

* විචල්‍යයන් ඕනෑ ගණනකට විසඳිය හැක මුලින් ම අපි විචල්‍යයන් 2 ක සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සලකමු

* පියවර :-

- $ax + by = c$
  $dx + ky = f$ නම්,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

ලෙස ලියාගන්න

- $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ d & k \end{bmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= x} = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}}_{= B}$

ලෙස ගනිමු

$$Ax = B \text{ — ①}$$

- ① $\times A^{-1}$ කිරීම

$$\underbrace{\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{= I} x}_{= x} = \cancel{A} A^{-1} B$$

$$x = A^{-1} B \text{ — ②}$$

- ② මගින් x න්‍යාසය සොයා x, y ප්‍රකාශ කරගන්න

7. උදා: $5x - 2y = 1$
$x + y = 3$ සමගාමී සමීකරණවල x, y සොයන්න

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$Ax = B \text{ — ①}$$

① × A⁻¹

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1} A}_{= I} x}_{= x} = A^{-1} B$$

$$x = A^{-1} B$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det |A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}{[5 + 2]}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -1/7 & 5/7 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -1/7 & 5/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 + 6/7 \\ -1/7 + 15/7 \end{bmatrix}$$

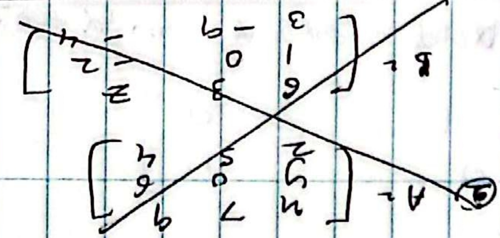
$$= \begin{bmatrix} 7/7 \\ 14/7 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = 2$ //

Note :- A, B න්‍යාස දෙකක
AB = 0 නම්,
A = 0 හෝ B = 0 විය යුතු නැත



න්‍යාස ගැටලු

① (a) $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.

සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතින බව පෙන්වන්න.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

හා $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ වේ.

$A = PQ^T + R$ වන පරිදි $a = 1$ බව පෙන්වන්න. a හි මෙම අගය සඳහා A^{-1} ලියා දක්වා, එනයින් $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$ වන පරිදි x හා y හි අගයන් සොයන්න.

A^{-1} පැවතීමට
$\det|A| \neq 0$ විය යුතුය

$$\det|A| = [a^2 + 2a + 2]$$
$$= (a+1)^2 \cancel{+2a} \; 1$$
$$= (a+1)^2 \cancel{+ 2(a+1)} \; 1$$
$$= \underbrace{\underbrace{(a+1)^2}_{\geq 0} + 1}_{> 0}$$

$\det|A| \neq 0$ නිසා
A^{-1} පවතී.

$$A = PQ^T + R$$

~~$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$~~

~~$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix} = [$~~

$$PQ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = PQ^T + R$$
$$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$a = 1$ //

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & +3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det|A|}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{[3+2]}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{—①}$$

~~$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$~~

~~$\begin{bmatrix} x - 2y \\ x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$~~

~~$x - 2y = -5$~~

~~$x + 3y = 10$~~

~~$x = 10 - 3y$~~

~~$10 - 5y = -5$~~

~~$-5y = -15$~~

~~$y = 3$ //~~

~~$x = 10 - 9$~~

~~$x = 1$ //~~

$\underline{① \times A^{-1}}$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= I} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 4 \\ 1 + 2 \end{bmatrix}$$

$x = 1$ //
$y = 3$ //

② $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$A^2 - 3A + 2I = 0$ බව පෙන්වන්න, මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය ද 0 යනු 2×2 ශුන්‍ය න්‍යාසයයි

එනයින්, A^{-1} සොයන්න

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$BA = B$ බව පෙන්වන්න.
එනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින්
$BC = 0$ වන පරිදි C ශුන්‍ය නොවන 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

LHS

$$A^2 - 3A + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \quad -①$$

①×A^{-1}

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}.A}_{=I}.A}_{=A} - 3\underbrace{A^{-1}.A}_{=I} + 2\underbrace{A^{-1}I}_{=A^{-1}} = \underbrace{A^{-1}0}_{=0}$$

$$A - 3I + 2A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ +\frac{2}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$BA = B$ බව

LHS

$$BA$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= B$$

$$BA = B$$

$$BA - B = 0$$

$$B\underbrace{(A-I)}_{=C} = 0$$

$$C = (A-I)$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$BA = B$ නම්
$BC = 0$ වන පරිදි C සොයමු

$$BA = B$$

$$BA - B = 0$$

$$B\underbrace{(A - I)}_{=C} = 0$$

$$BC = 0$$

$$C = A - I$$